جامعة البعث — الامتحان الفصلي الثاني 2016-2017 — الاسم:

كلية العلوم – قسم الرياضيات — بنى جبرية (٣) — المدة: ساعة ونصف

**السؤال الأول (25) درجة:**

ليكن الموديول $R^3$ على الحلقة الواحدية $R$، ولتكن المجموعتان:

$W=\{(0,b,c): b,c\in R\}$ و $U=\{(a,b,c): a=b=c ; a,b,c\in R\}$

والمطلوب:

١) اثبت أن المجموعة $U$ تؤلف موديولاً جزئياً في الموديول $R^3$.

٢) اثبت أن: $R^3=U\oplus W$.

**السؤال الثاني (20) درجة:**

ليكن الموديول $M$ على الحلقة الواحدية $R$ موديولاً نصف بسيط وليكن $U$ موديولاً جزئياً في $M$ منتهي التوليد وغير صفري، والمطلوب إثبات أن $U$ يحوي موديولاً جزئياً بسيطاً.

**السؤال الثالث (35) درجة:**

نفرض أن $f\in Hom_R(M,N)$، والمطلوب:

١) اثبت أن المتتالية: $0\longrightarrow Ker f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} N/Im f \longrightarrow 0$

تامة.

٢) إذا كان كل من $M$ و $N$ بسيطاً و $f$ غير صفري، فاثبت أن $f$ إيزومورفيزم.

**السؤال الرابع (20) درجة:**

ليكن $M$ موديولاً نيوترياً (آرتينياً) على الحلقة الواحدية $R$، وليكن $U$ موديولاً جزئياً في $M$.

والمطلوب:

١) اثبت أن: $U$ نيوتري (آرتيني).

٢) اثبت أن $M/U$ نيوتري (آرتيني).

د. ياسين

١٦/٥/٢٠١٧

سلم تصحيح امتحان بنى (٢) الفصل الثاني ٢٠١٦ - ٢٠١٧

د. ... مخلوف

الأول (25)

- $(0,0,0) \in U \Rightarrow U \neq \phi$
- $\forall u, v \in U : u = (a,a,a) ; v = (b,b,b) ; a,b \in R \Rightarrow$

  $u - v = (a-b, a-b, a-b) \in U ; a-b \in R$

- $\forall \alpha \in R ; \alpha u = \alpha(a,a,a) = (\alpha a, \alpha a, \alpha a) \in U ; \alpha a \in R$

  إذاً: $U$ مودول جزئي في $R^3$

- $\forall (a,b,c) \in R^3 : (a,b,c) = (a,a,a) + (0, b-a, c-a)$

  وبملاحظة أنّ $u = (a,a,a) \in U$ و $w = (0, b-a, c-a) \in W$ ، يكون

  إذاً $(a,b,c) = u + w \in U + W$ ، $R^3 = U + W$

- $(a,b,c) \in U \cap W \Rightarrow (a,b,c) \in U$ و $(a,b,c) \in W \Rightarrow$

  $(a,b,c) \in U \Rightarrow a = b = c$ و $(a,b,c) \in W \Rightarrow a = 0$

  ومن هذا ينتج أنّ $a = b = c = 0$ أي أنّ $U \cap W = \{0\}$

  ولأنّ $R^3 = U + W$ يكون $R^3 = U \oplus W$ .

الثاني (20)

لأنّ $U$ يحوي مودولاً جزئياً أعظمياً فإن $C$ ولأن $M$ نصف بسيط فيوجد $M_1$ مودول جزئي في $M$ بحيث أنّ $M = C \oplus M_1$ وعندئذٍ يكون:

$U = M \cap U = (C \oplus M_1) \cap U = (C \cap U) \oplus (M_1 \cap U) = C \oplus (M_1 \cap U)$

ولأنّ $C$ أعظمي في $U$ فإنّ $U/C \cong M_1 \cap U$

$U/C$ بسيط ومن ثم الايزومورف معه $(M_1 \cap U)$ سيكون بسيطاً.

وبملاحظة أنّ $U$ و $M_1 \cap U$ فإن $U$ يحوي مودولاً جزئياً بسيطاً.

## السؤال الثالث (3.5)

1) تمام المتتالية: $\ker f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} N/\operatorname{im} f \to 0$

تامة إذا كانت كل متتالية جزئية فيها تامة.

$0 \to \ker f \xrightarrow{i} M$ تامة لأن $i$ متباين

$\operatorname{im} i = \ker f$   $\ker f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N$ تامة لأن

$\operatorname{im} f = \ker \pi$   $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} N/\operatorname{im} f$ تامة لأن

$N \to N/\operatorname{im} f \xrightarrow{\pi} 0$ تامة لأن $\pi$ غامر

2) لماذا كان كل من M و N بسيطاً و f غير صفري فإن $\ker f = 0$ و $\operatorname{im} f = N$ وهذا يجعل f متبايناً وغامراً وهو هومومورفيزم فهو ايزومورفيزم.

## السؤال الرابع (20)

إذا كان M نوترياً (أرتينياً) وحيث أن كل مودول جزئي في أي مودول جزئي في M يكون مودولاً جزئياً في M أيضاً، فمن البديهي أنه يحقق كل مودول جزئي نفس الشرط الذي يحققه M، ولذلك إذا كان M نوترياً (أرتينياً) U سيكون نوترياً (أرتينياً).

والأمر نفسه من أجل فاكتر M بواسطة U وذلك بسبب وجود تقابل بين مجموعة المودولات الجزئية في M/U وبين المودولات الجزئية A في M بشرط $U \subseteq A \subseteq M$.

لو أجاب الطالب بأية طريقة أخرى صحيحة فتوزع الدرجات بما يتطابق مع هذا السلم.

١٦/٧/٢٠١٧